
Grands systèmes dynamiques et grandes matrices aléatoires

Jamal Najim*¹

¹Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge – Ecole des Ponts ParisTech, Centre National de la Recherche Scientifique, Université Gustave Eiffel, Centre National de la Recherche Scientifique : UMR8049 – France

Résumé

Le fil conducteur de ce mini-cours sera l'analyse de systèmes couplés d'équations différentielles dits de Lotka-Volterra (LV) en grande dimension. De tels modèles peuvent être utilisés pour comprendre les réseaux d'agents en interactions, comme des réseaux trophiques par exemple. En grande dimension, on modélisera les interactions entre équations par des matrices aléatoires.

Après une brève présentation de ce contexte, on fera une introduction à la théorie des grandes matrices aléatoires. On décrira le comportement spectral de modèles canoniques de telles matrices (Gaussian Orthogonal Ensemble, ensemble de Ginibre réel, modèle elliptique) ainsi que des propriétés de norme spectrale.

On s'intéressera ensuite aux grands systèmes de LV. On introduira les notions d'équilibre stable et on montrera comment caractériser un tel équilibre. On verra enfin comment la compréhension du comportement de grandes matrices aléatoires nous permettra d'apporter des éléments de réponse à l'existence d'un équilibre stable.

Dans la dernière partie du cours, on s'intéressera aux propriétés statistiques de l'équilibre stable (aléatoire car associé à la matrice aléatoire d'interactions). En particulier, on essaiera de décrire la proportion de composantes strictement positives de cet équilibre (qui correspondent dans le contexte d'un réseau trophique aux espèces survivantes). Des algorithmes de type AMP (Approximate Message Passing) permettent d'accéder aux propriétés statistiques de l'équilibre et seront présentés dans ce cours.

Mots-Clés: systèmes dynamiques, matrices aléatoires

*Intervenant